Eigenschaften von definiten Matrizen

1 Definitionen

1. Eine quadratische Matrix A heißt **positiv definit**, wenn für jeden Vektor $x \neq 0$ gilt:

$$x^T Ax > 0.$$

2. Eine quadratische Matrix A heißt **negativ definit**, wenn für jeden Vektor $x \neq 0$ gilt:

$$x^T Ax < 0.$$

3. Eine quadratische Matrix A heißt **positiv semidefinit**, wenn für jeden Vektor $x \neq 0$ gilt:

$$x^T Ax \geq 0.$$

4. Eine quadratische Matrix A heißt **negativ semidefinit**, wenn für jeden Vektor $x \neq 0$ gilt:

$$x^T Ax \leq 0.$$

2 Eigenschaften

1. A ist genau dann positiv definit, wenn $-A$ negativ definit ist. (Entsprechend für semidefinit.)

2. Eine definite Matrix A ist nichtsingulär, d.h. es gilt $Ax \neq 0$ für alle $x \neq 0$.

3. Eine nichtsinguläre symmetrische Matrix A ist genau dann positiv definit, wenn es eine quadratische Matrix B gibt mit $A = B^T B$. Ist A unsymmetrisch, so muß entsprechend ein B mit $\frac{1}{2}\left(A^T + A\right) = B^T B$ existieren.

4. Wenn A positiv definit ist, ist A nichtsingulär und es existiert eine Inverse A^{-1}.

5. Wenn A positiv definit ist, ist A^{-1} ebenfalls positiv definit.

6. Wenn A positiv definit ist, sind alle Hauptdiagonalelemente von A positiv.

7. Die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{2n} \\ . & & . & \\ . & & & . \\ a_{1n} & a_{2n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist genau dann positiv definit, wenn die Hauptunterdeterminanten (Hauptminoren)

$$|a_{11}|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & . & \\ a_{13} & & a_{33} \end{vmatrix}, \quad ....$$

$$... \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{12} & . & & . \\ . & & & \\ & & . & \\ a_{1n} & . & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

alle positiv sind.

8. Die Matrix A ist genau dann negativ definit, wenn der erste Hauptminor negativ ist und die Hauptminoren das Vorzeichen wechseln. (Der i-te Hauptminor hat das gleiche Vorzeichen wie $(-1)^i$.)